お小遣いのもらいかた

[舞　　台]　　南の国・ハメハメハ王国

[登場人物]　　大王・ハメハメハ
王妃・ハメハメハ
第１王子・ハメハメハ（別名太（ブー））
第２王子・ハメハメハ（別名平（フー））
第３王子・ハメハメハ（別名洋（ウー））

[貨幣単位]　　ワプパ（W）　～　１Wの貨幣価値は，全く不明！

それでは，物語のはじまり，はじまり…

南の国・ハメハメハ王国では１年間のお小遣いを取り決める儀式が行なわれています．大王は王妃と相談した結果，「毎月500Wを10%アップして毎月550W」という提案をしました．

王子達は10%アップでは不満です．「毎月同じ金額では面白くない」という理由をつけて，それぞれの提案を考えたいと主張したところ，大王も王妃も賛成しました．

さて，お小遣いのもらいかたどうなることでしょう…

三人の王子達は，ほんのしばらく“お小遣いのもらいかた”を考えることができました．そして，次のような提案をしました．

洋（ウー）（第３王子）の提案：

「1月100W, 2月200W, 3月300W, …と，毎月100Wずつ増える方法」

平（フー）（第２王子）の提案：

「1月5W, 2月10W, 3月20W, …と，毎月2倍, 2倍と増える方法」

太（ブー）（第１王子）の提案：

「1月10W, 2月40W, 3月90W, …と，10×$(月)^2$ Wとする方法」

さて，賢明なる皆さんは４つの提案のうち誰の提案を支持しますか？

30秒ほど考えて，括弧内に丸印をつけてください．

大王（　　）　第３王子（　　）　第２王子（　　）　第１王子（　　）

それでは，４つの提案をそれぞれ計算して比較することにしましょうか！

Ⅰ．　大王の提案の場合

「毎月500Wを10％アップして毎月550W」

これは単純計算です．毎月550Wだから…

１年間で，＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿W

II．　第３王子の場合

「1月100W, 2月200W, 3月300W, …と，毎月100Wずつ増える方法」

（このように同じ数を順に加えてできる数の列を*等差数列* といいます）

この計算をする前に，ちょっとした逸話を紹介します…

その昔，ガウスという少年が１から４０まで加えるよう先生に命じられました．

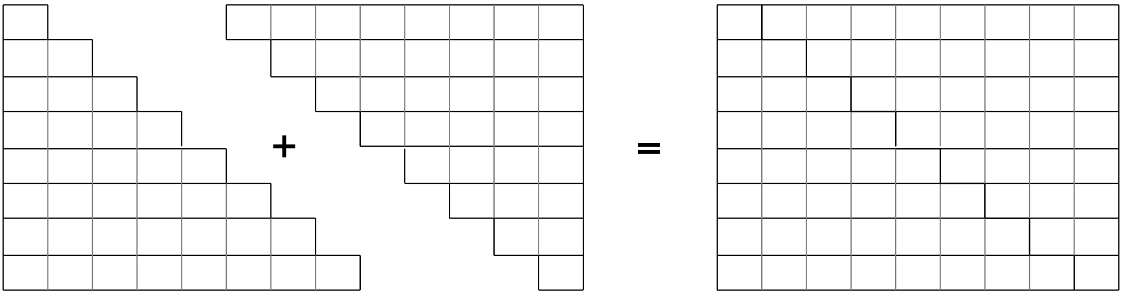
ところが，彼はこの難問をほんの1，2分で解いてしまいました．

これに驚いた先生，ガウスの計算メモを見てもっと驚いてしまいました．

$$\begin{array}{r} 1+2+3+\cdots+38+39+40 \\ 40+39+38+\cdots+3+2+1 \\ \hline 41+41+41+\cdots+41+41+41 \end{array}$$

$$41\times40\div2=820$$

ガウス少年の方法を利用すれば等差数列の和は，あっという間に計算できます．計算方法は…



公式のメモ

さて，ガウスの方法を利用して第３王子の１年間のお小遣いを計算しましょう！

$$100+200+\cdots+1100+1200=\frac{\quad\times(\quad+\quad)}{\qquad}=$$

１年間で，＿＿＿＿＿＿＿＿W

III.　第２王子の場合

「1月5W, 2月10W, 3月20W, …と，毎月2倍, 2倍と増える方法」

（このように同じ数を順にかけてできる数の列を*等比数列*といいます）

等比数列の和の計算は面倒です．でもヒントになる計算を書いてみると…

S＝1+3+9+27+81+243

を求めるには,

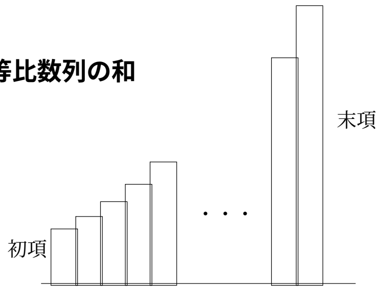
3倍した式から元の式を引くと…

$$
\begin{array}{rl}
 & 3S=3+9+27+81+243+729 \\
- & S=1+3+9+27+81+243 \\
\hline
 & 2S=729-1
\end{array}
$$

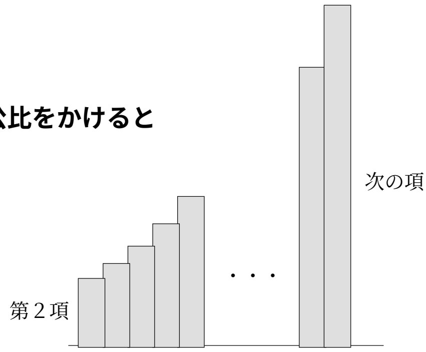
よって，S＝…

等比数列の和・公式の説明図

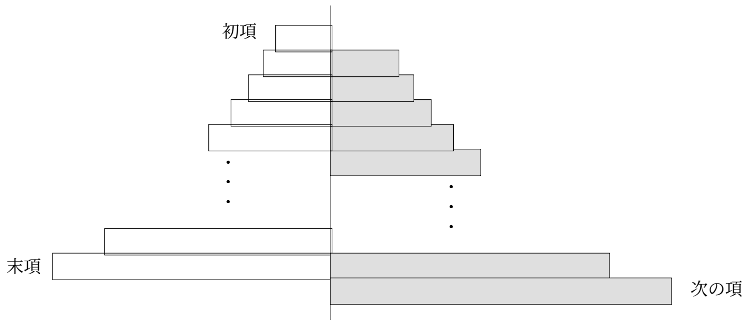
等比数列の和



和に公比をかけると



引き算を実行



初項と、次の項だけ残ります

公式のメモ

面倒なようで，実は簡単な計算へと進めます．

まず，1月5Wの小遣いが2倍2倍で12月にはいくらになるか計算してみると…

5，　10，　20，　，　，　，

，　，　，　，　，＿＿＿＿＿

第２王子の１年間のお小遣いを合計しましょう．

（等差数列と等比数列ずいぶん違いますね！）

5＋10＋…＋　＝　＝

１年間で，＿＿＿＿＿＿＿＿ W

IV.　第１王子の場合

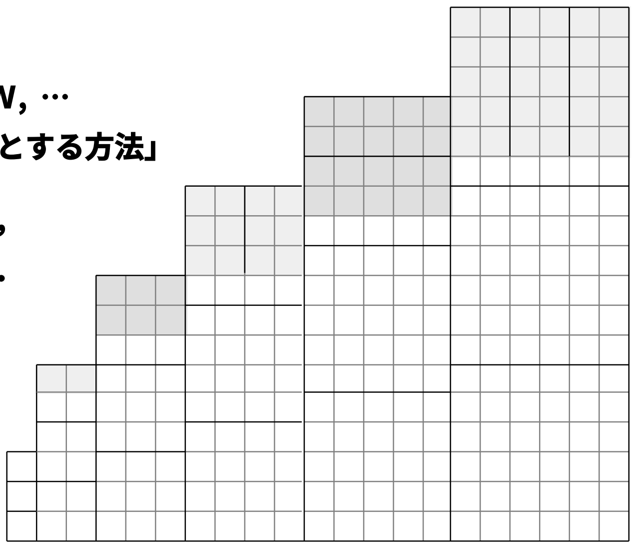
「1月10W, 2月40W, 3月90W, …

のように，$10\times(月)^2$ Wとする方法」

（この計算は少しばかり厄介です，

右図を利用して公式を作ります．

脳ミソ，フル回転！）

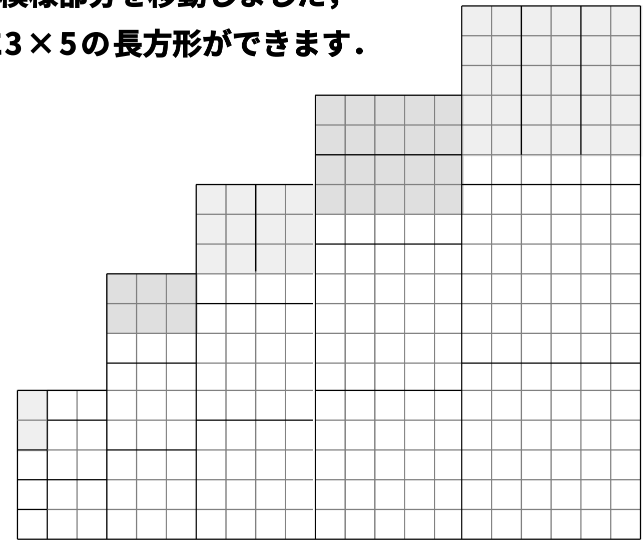


※ ２乗の和が３個ずつあります．

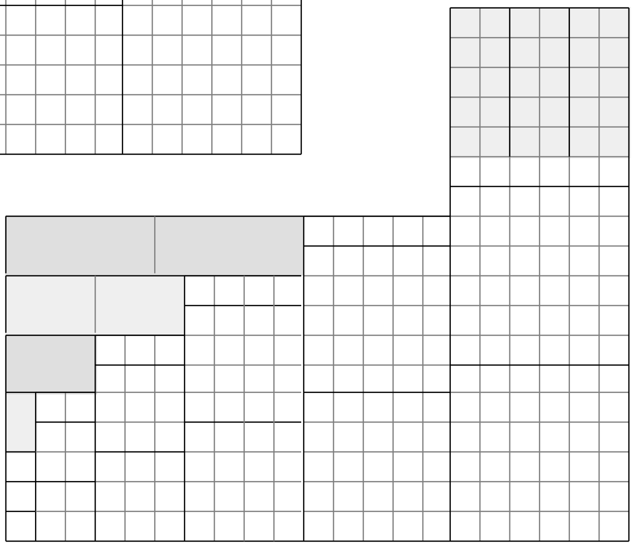
模様の部分を切り取って，

左の方にくっつけると…

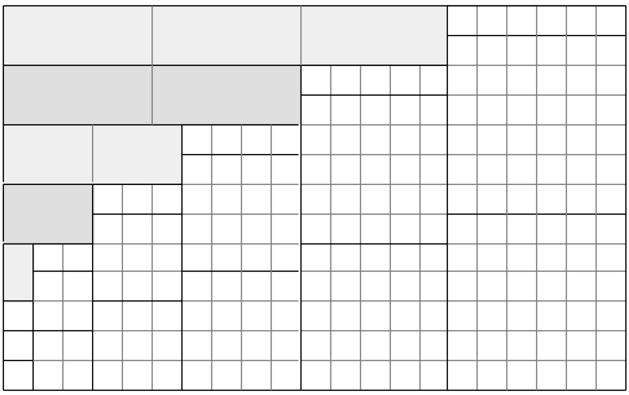
※ 2^2の模様部分を移動しました，
左下に3×5の長方形ができます．



※ 順に3^2，4^2，5^2の
模様部分を移動しました．
左下の長方形は
6×7，10×9，15×11と
徐々に大きくなります．



※ 移動が完了しました，
21×13の長方形です．



続いて，公式を考えます．

- $3(1^2+2^2)=3\times5$
- $3(1^2+2^2+3^2)=6\times7$
- $3(1^2+2^2+3^2+4^2)=10\times9$
- $3(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)=15\times11$
- $3(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)=21\times13$

長方形の横・縦にはそれぞれの法則があります…

公式のメモ

$$1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{\quad\times\quad\times\quad}{\qquad\qquad}$$

さあ，第１王子の１年分のお小遣いを計算しよう…

$$10+40+\cdots\cdots+10\times 12^2=10(1^2+2^2+\cdots\cdots+12^2)$$

$$=10\times\frac{\quad\times\quad\times\quad}{\qquad\qquad}=$$

１年間で，＿＿＿＿＿＿＿＿W

さてさて結論です，

１年間のお小遣いは＿＿＿＿＿＿が一番多くなりました．

『お小遣いのもらいかた』これで終わりです，これと似た話を紹介します．

豊臣秀吉の家臣の曾呂利新座衛門が戦で大手柄をたて，ご褒美に「この部屋にある宝，好きなものをつかわそう」と言われたそうな．

慎み深い新座衛門，「そんな滅相もございません，ほんの少しお米をいただければ結構でございます．一日目に一粒，二日目に二粒，三日目には四粒と順に倍にして一月の間いただければ」と言ったとか…

さて，この続きは皆さんで考えて下さい．

似た話は現代にもあります，サラ金 ・消費者ローン ・学生ローン ・レディース キャッシング などがそうです．お金を借りると利息が，返せないと遅延損害金も必要に，一年でほとんど２倍になることも… １０年で何倍になるか？ もう簡単に分かりますね！

《解　　　説》

この教材の最大の面白味は“等比数列の予測をこえる変化”です．しかし，等比数列だけを扱っていては，予想がついてしまうのであまり面白くありません．４種類の提案があることが面白さを増幅しています．

この教材での最初の授業は，サマーセミナーではなく市邨学園高校から要請されて行った研究授業です．そのときには“大王の提案”はありませんでした．

“王子の３つの提案”だけでは面白くないので何か工夫はないか？　東海地区協総会の折，高校分科会で意見を求めたところ，小沢健一先生（当時の数教協委員長）から“大王の提案”が提案され，今の形になりました．

今の形での最初の授業者は私ではなく職場の同僚・佐藤真理さんでした．サマーセミナーでのタイトルは『マリリンのお小遣いのもらいかた』，“南山国際”の校名も相まって，「外国人教師だ」「外国人の女生徒だ」などといったデマが飛び交ったとか，サマーセミナー当日には130名を超す生徒が押し寄せました．これは未だ破られぬ数学講座の参加者数レコードとなっています．

この授業を行う時には「４種類の提案のどれを選ぶか？」，最初に必ず挙手をしてもらいます．平方数の数列の支持者の方が等比数列の支持者より多いのが普通です．

「２倍２倍は多くなりそうだ」とは考えるものの，「平方数も…」と考えているようです．ここで“平方数の数列”は明らかに『ノイズ』であり，かなりの生徒が見事なまでに『ノイズ』に惑わされます．きっと，最後にする“消費者金融への注意”も印象に残ると思います．

また，“平方数”の『ノイズ』としての役割を際立たせるのは“大王の提案”ですが，“平方数”での１年間お小遣いが“大王の提案”よりも少なくなるのは皮肉で面白い結末になっています．このあたりは，社会で賢く生きていく上で教訓になるようなことにも思いますが，いかがなものでしょう？

ぜひ一度，『お小遣いのもらいかた』にあなた流のアレンジをして，授業を楽しんで下さい